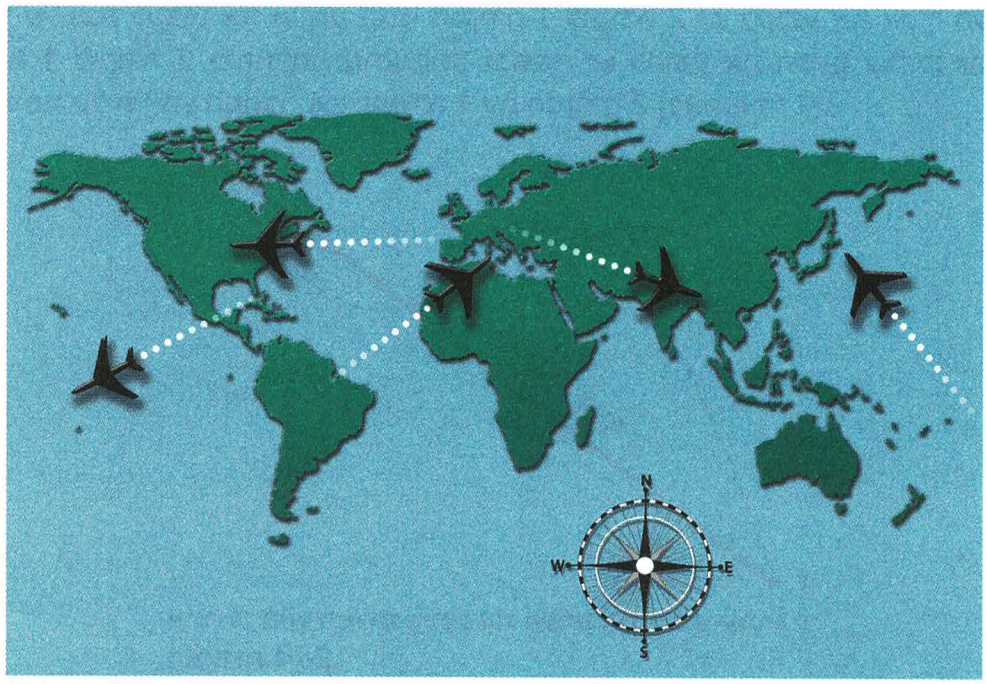
פרק 4 – וקטורים וסקלרים



בפרק זה נבחין בין שני סוגים של גדלים פיזיקליים. הסוג הראשון הוא גדלים הנקראים סקלרים והשני - גדלים הנקראים וקטורים.

1. וקטורים וסקלרים

1.1. סקלרים

סקלר הוא גודל פיזיקלי שעל מנת לבטא (או להגדיר) אותו בשלמות מספיק ערך אחד – הכמות שלו (וכמובן שיש לציין את יחידות המידה).

דוגמאות לגדלים פיזיקליים שהם סקלרים: המסה, הזמן, האורך, הנפח והצפיפות. על מנת לקבוע כל אחד מהגדלים האלה, מספיק לתת ערך מספרי בנוסף ליחידת המדידה.

לדוגמה, אם רוצים לקבוע את גודלו של פרק זמן מסוים, מפעילים שעון עצר בתחילת פרק זמן זה, ומפסיקים אותו בסוף פרק הזמן. קריאת שעון העצר בנוסף ליחידת המדידה (שניות, דקות או שעות) מספקים לנו את כל האינפורמציה הדרושה לקביעת גודל פיזיקלי זה.

1.2. וקטורים

וקטור הוא גודל פיזיקלי שעל מנת לבטא (או להגדיר) אותו בשלמות נדרשים גם הכמות שלו (בצירוף יחידות המידה) וגם הכיוון שלו במרחב.

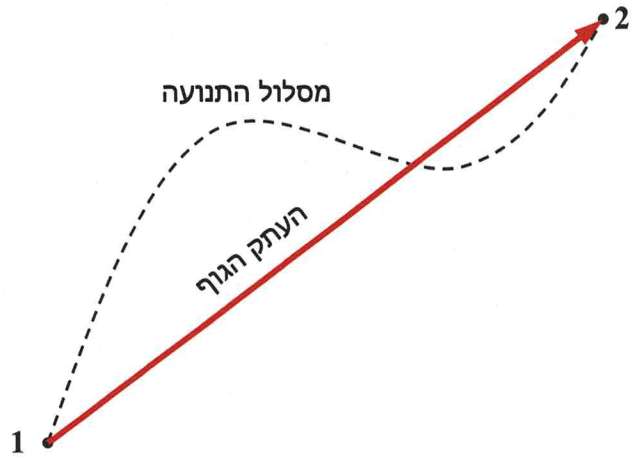
דוגמאות לגדלים שהם וקטורים: המהירות, הכוח, התאוצה. על מנת לקבוע כל אחד מגדלים אלה, לא מספיק לתת ערך מספרי ויחידת מדידה, אלא יש לקבוע גם את הכיוון שלו.

על מנת להבדיל גודל וקטורי מגודל סקלרי, נהוג להוסיף חץ קטן מעל הסמל של הגודל הווקטורי. לדוגמא רושמים $\vec{v}$ עבור המהירות כווקטור, או $\vec{a}$ עבור התאוצה כווקטור או $\vec{F}$ עבור הכוח. לפעמים, במקום להוסיף חץ קטן מעל הסמל של גודל וקטורי, נהוג לסמן וקטורים באמצעות אותיות מודגשות, כמו לדוגמה v , a , F.

אחד מהגדלים הווקטורים החשובים והקלים להסבר בשלב זה של הלימוד הוא ההעתק במישור,

אותו נסמן בינתיים באות $\vec{d}$.

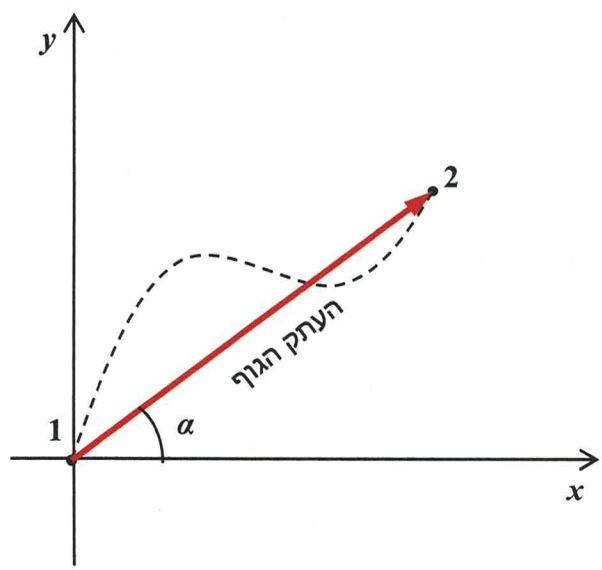
אם גוף נע במישור ומגיע מנקודה 1 לנקודה 2 לאורך מסלול מסוים כפי שמתואר באיור 1, אז ההעתק שלו הוא הקו הישר המחבר את הנקודה 1 אל הנקודה 2 (ראה איור 1). גודל זה הוא גודל וקטורי, כי על מנת לקבוע את העתק הגוף מנקודה 1 לנקודה 2 יש לקבוע את אורך הקו המחבר את הנקודה 1 לנקודה 2 ביחידות המתאימות, ובנוסף יש לקבוע את הכיוון של קו זה. ההעתק בתרשים מיוצג על ידי חץ המחבר את הנקודה 1 עם הנקודה 2 (ראה איור 1).



איור 1: החץ האדום מייצג את העתק הגוף בתנועתו בין הנקודות 1 ו-2.

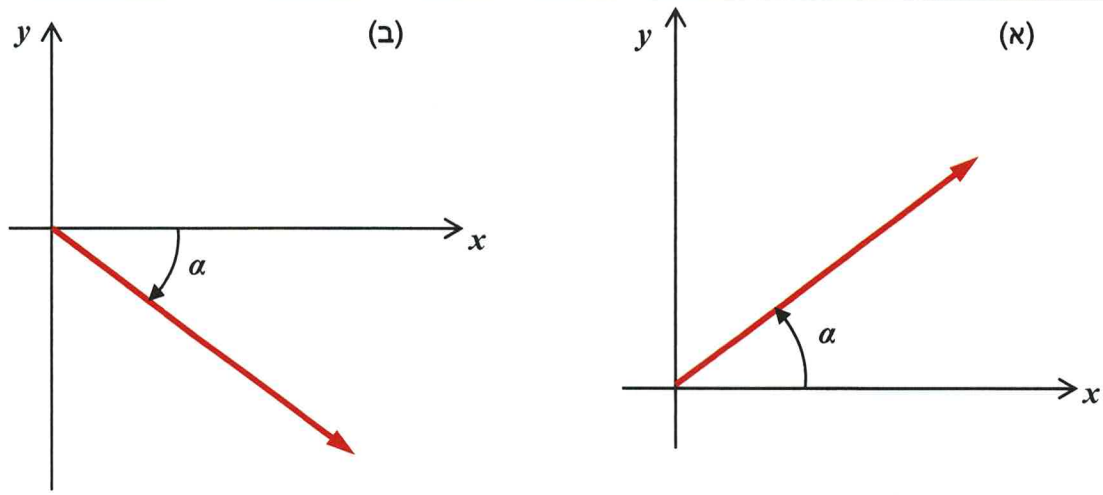
על מנת לקבוע את כיוון הווקטור, צריך לקבוע דרך מוסכמת. מכיוון שאנו עוסקים בווקטורים במישור בלבד (ולא במרחב), כיוון הווקטור נקבע באופן הבא:

1. בוחרים מערכת צירים דו ממדית (xy) בהתאם לבעיה.
2. כיוון הווקטור נקבע על ידי הזווית בין הווקטור לבין הכיוון החיובי של ציר x במערכת צירים זו (הזווית α באיור 2).



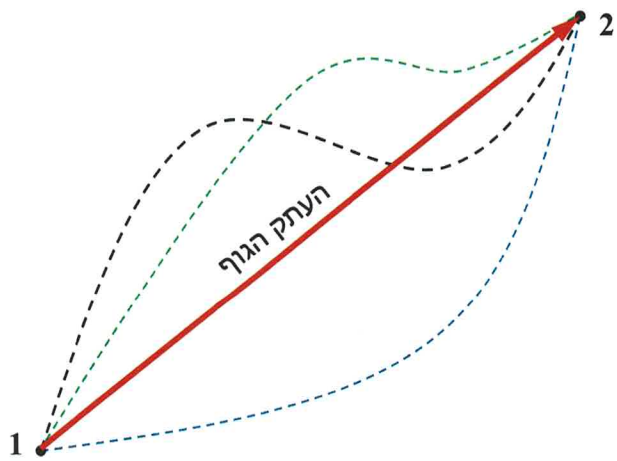
איור 2: כיוון הוקטור נקבע על ידי הזווית הנמצאת בין הוקטור לכיוון החיובי של ציר x.

3. זווית הווקטור מוגדרת כחיובית עבור המצב שבו נעים נגד כיוון תנועת מחוגי השעון על מנת להגיע מציר x אל הווקטור כפי שמתואר באיור 3א, ושלילית עבור המצב שבו נעים בכיוון תנועת מחוגי השעון על מנת להגיע מציר x אל הווקטור כפי שמתואר באיור 3ב.



איור 3: (א) הזווית חיובית. (ב) הזווית שלילית.

ראוי לציין שהעתק הגוף בין שתי נקודות אינו תלוי במסלול בו נע הגוף בין שתי נקודות אלה, אלא רק בנקודות ההתחלה והסיום. באיור 4 מוצגים מספר מסלולים המחברים בין הנקודות 1 ו-2. העתק הגוף בכל המסלולים האלה זהה.



איור 4: העתק הגוף בין שתי נקודות אינו תלוי במסלול בו נע הגוף בין נקודות אלה אלא רק בנקודות ההתחלה והסיום.

הערות:

1. גודל וקטורי A מסומן, כאמור, על ידי חץ קטן מעל הסמל של הווקטור: $\vec{A}$. הגודל של הווקטור (ללא הכיוון) מסומן ב-$\left|\vec{A}\right|$ שהוא נקרא הערך המוחלט של הווקטור. לפעמים מסמנים את הערך המוחלט של הווקטור על ידי כך שכותבים את סימן הווקטור ללא חץ, כלומר מתקיים ש-$A=\left|\vec{A}\right|$.
2. אם נתון שגודלו של וקטור העתק מסוים, $\vec{d}$, הוא $2\,\mathrm{m}$ וכיוונו הוא $\alpha=60^\circ$, לא ניתן (במקרה זה) לרשום $\vec{d}=2\,\mathrm{m}$, כי בכתיב זה חסר הכיוון. במקרה כזה או שרושמים ש-$d=2\mathrm{m}$ ו-$\alpha=60^\circ$, או שרושמים $\vec{d}=\left(2\,\mathrm{m},60^\circ\right)$.
3. הווקטור מיוצג בתרשימים על ידי חץ. חץ זה מכוון בכיוון הווקטור ואורכו יחסי לגודל הווקטור על פי סקלה מסוימת, כלומר בקנה מידה שהוגדר.
4. שני וקטורים נקראים שווים אם יש להם אותו גודל ואותו כיוון.
5. שני וקטורים נקראים מנוגדים אם יש להם אותו גודל אבל כיווניהם מנוגדים.

2. חיבור גרפי של וקטורים

ניתן לבצע על הווקטורים את כל פעולות החישוב כמו כפל, חילק, חיבור או חיסור. בספר זה נסתפק בפעולות החיבור והחיסור בלבד.

על מנת לחבר שני גדלים פיזיקליים, הם צריכים להיות מאותו סוג (לדוגמה שניהם מסה, או שניהם מהירות או כוח וכדומה), ובנוסף הם צריכים להיות בעלי אותן יחידות.

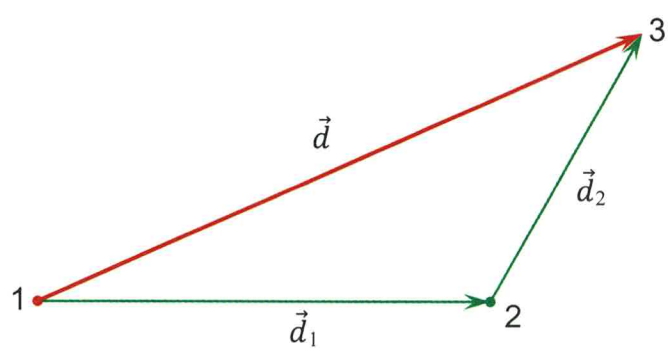
אם שני הגדלים הפיזיקליים הם סקלרים אז החיבור שלהם הוא חיבור אלגברי כמו במספרים "רגילים". לדוגמה, אם רוצים לחבר שתי מסות $m_1 = 0.5\,\text{kg}$ ו- $m_2 = 200\,\text{g}$, קודם כל צריך לבטא את שני הגדלים באותן יחידות, נניח בקילוגרמים, לאחר מכן לבצע את החיבור:

$$m = m_1 + m_2 = 0.5\,\text{kg} + 0.2\,\text{kg} = 0.7\,\text{kg}$$

אם שני הגדלים הפיזיקליים הם וקטורים, על מנת שנוכל לחבר אותם, כאמור, הם צריכים להיות מאותו סוג ובעלי אותן יחידות, אבל במקרה של וקטורים החיבור אינו אלגברי כמו בסקלרים, כי לווקטורים יש כיוון אותו יש לקחת בחשבון בפעולת החיבור.

על מנת להבין איך מתבצע חיבור שני גדלים וקטורים, יש להבין את משמעות פעולת החיבור עבור הווקטורים. נעזר בהעתק על מנת להבהיר את משמעות פעולת החיבור הווקטורי.

באיור 5 מתואר גוף הנע במישור. הגוף החל בתנועה מהנקודה 1, והגיע לנקודה 2 ולאחר מכן המשיך בתנועתו והגיע לנקודה 3. בתנועה זו יש לגוף שני העתקים, הראשון מהנקודה 1 לנקודה 2, אותו נסמן ב- $\vec{d}_1$, וההעתק השני מהנקודה 2 לנקודה 3, אותו נסמן ב- $\vec{d}_2$ (ראה איור 5).



איור 5: תרשים המתאר את פעולת החיבור של שני וקטורים.

ניתן להחליף את שני ההעתקים $\vec{d}_1$ ו- $\vec{d}_2$ בהעתק אחד שקול, $\vec{d}$, שבאמצעותו ניתן להגיע ישירות מנקודה 1 לנקודה 3. וקטור זה $(\vec{d})$ מוצג באדום באיור 5. מכיוון שווקטור זה מחליף את שני וקטורי ההעתקים $\vec{d}_1$ ו- $\vec{d}_2$, הוא נקרא הווקטור השקול של שני הווקטורים $\vec{d}_1$ ו- $\vec{d}_2$, או החיבור **הווקטורי** שלהם, כך שרושמים:

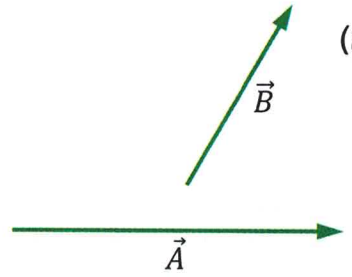
$$\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 \qquad (1)$$

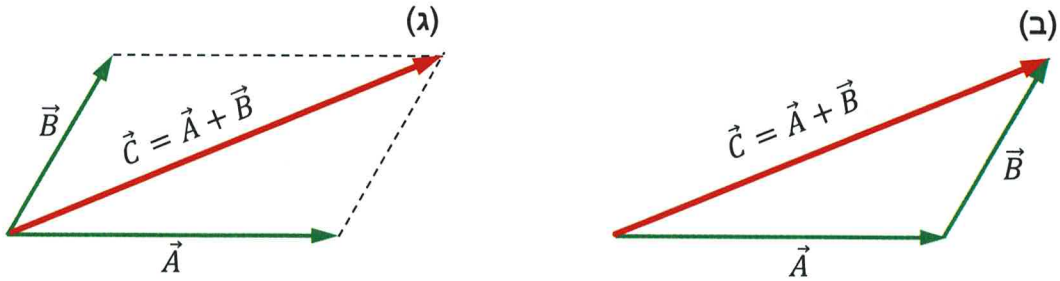
החיבור במשוואה האחרונה אינו חיבור רגיל אלא חיבור המוגדר על ידי השרטוט בתרשים 5 והנקרא חיבור (או סכום) וקטורי של הווקטורים $\vec{d}_1$ ו- $\vec{d}_2$.

על פי ההסבר הקודם ניתן להבין שעל מנת למצוא את הווקטור $\vec{C}$, שהוא החיבור של שני הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ המתוארים באיור 6א, כלומר כדי לבצע את הפעולה $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, יש להתקדם בצעדים הבאים:

1. משרטטים בקנה מידה את שני הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$, כך שהזנב של הווקטור B צמוד לראש הווקטור $\vec{A}$, כפי שמתואר באיור 6ב.
2. מחברים את הזנב של הווקטור $\vec{A}$ עם הראש של הווקטור $\vec{B}$ (איור 6ב). הווקטור המתקבל הוא

הווקטור $\vec{C}$ שהוא הסכום (השקול) של שני הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$.



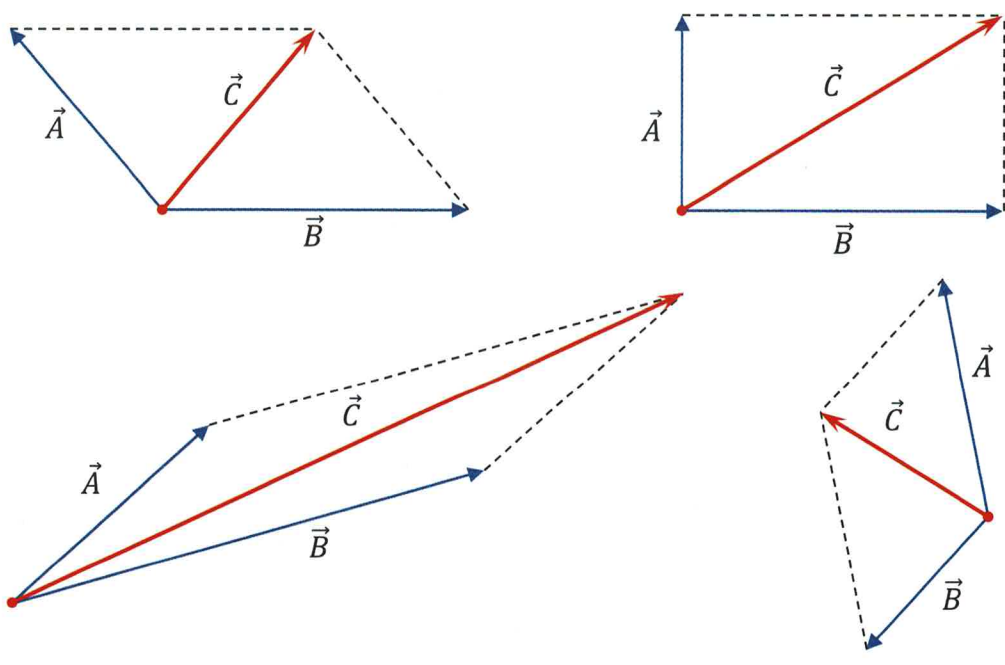


איור 6: (א) שני וקטורים שונים. (ב) תרשים המציג דרך החיבור של שני הוקטורים. (ג) דרך נוספת לחיבור שני הוקטורים.

ניתן לבצע את פעולת החיבור גם בדרך אחרת, שקולה, המוצגת באיור 6ג, והיא כדלקמן:

1. משרטטים את שני הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ כך ששני הזנבות שלהם מתחילים מאותה נקודה (ראה איור 6ג).
2. משלימים את שני הווקטורים למקבילית.
3. הסכום של שני הווקטורים הוא הווקטור המחבר את נקודת ההתחלה של שני הווקטורים עם הקדקוד שממול.

בתרשימים הבאים מתוארות מספר דוגמאות לחיבור גרפי של שני ווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$:



אם שני הווקטורים מכוונים לאותו כיוון, כפי שמתואר באיור 7א, הסכום שלהם הוא וקטור שלישי, המכוון אף הוא באותו כיוון וגודלו שווה לסכום האלגברי של ערכי שני הווקטורים הראשונים.
אם לשני הווקטורים יש כיוונים מנוגדים, כמתואר באיור 7ב, הסכום שלהם במקרה זה שווה לחיסור שני הווקטורים, כך שכיוון השקול הוא בכיוון הווקטור הגדול יותר.

איור 7: (א) חיבור שני וקטורים המכוונים לאותו כיוון. (ב) חיבור שני וקטורים המכוונים לכיוונים מנוגדים.

דוגמאות לחיבור וקטורים בדרך גרפית

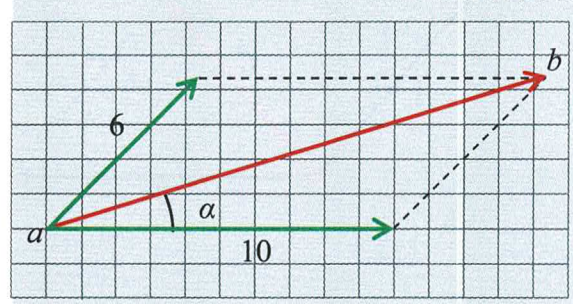
דוגמה 1

חשב את ההעתק השקול של שני וקטורי ההעתק הבאים: העתק של $10\,\text{m}$ בכיוון החיובי של ציר x, והעתק של $6\,\text{m}$ בכיוון 45° (ביחס לציר ה-x).

פתרון:

נשרטט את שני הווקטורים (ראה תרשים בהמשך) בהתאם לכוונים הנתונים ובקנה מידה של ריבוע אחד לכל מטר, כך ששני הווקטורים יוצאים מאותה נקודה (הנקודה a בתרשים).

משלימים את שני הווקטורים למקבילית. הווקטור השקול הוא הווקטור המחבר את נקודת ההתחלה של שני הווקטורים (הנקודה a בתרשים) עם הקדקוד שממול שמסומן באות b בתרשים. וקטור זה מסומן בצבע אדום בתרשים.



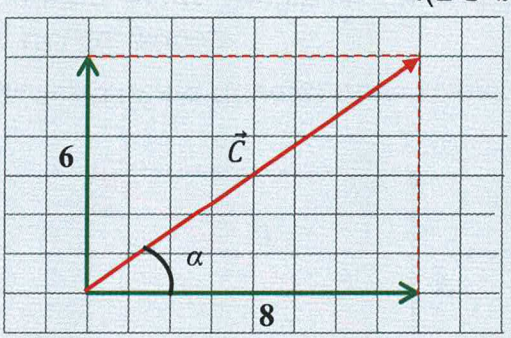
על מנת לקבוע את גודלו של הווקטור השקול יש למדוד את אורכו. מתקבל שאורכו הוא 14.8 יחידות, לכן אורך הווקטור השקול הוא $14.8\,\text{m}$. על מנת לקבוע את כיוונו של הווקטור השקול יש למדוד את הזווית α שבתרשים. בעזרת מד זווית מתקבל ש-$\alpha=16.6^\circ$.

דוגמה 2

נתונים שני וקטורים ניצבים, הראשון גודלו 8 יחידות וכיוונו בכיוון החיובי של ציר ה-x, והשני גודלו 6 יחידות בכיוון החיובי של ציר ה-y. חשב את גודלו וכיוונו של הווקטור השקול של שני וקטורים אלה.

פתרון:

נשרטט את שני הווקטורים במערכת הצירים המתוארת בתרשים הבא ונשלים את שני הווקטורים למקבילית (מלבן במקרה זה). הווקטור השקול של שני הווקטורים הנתונים הוא אלכסון המלבן (הווקטור בצבע האדום בתרשים).



במקרה הנתון בשאלה זו ניתן בקלות לחשב את גודלו וכיוונו של הווקטור השקול $\vec{C}$.
את גודלו ניתן לחשב על פי משפט פיתגורס:

$$\left|\vec{C}\right|=C=\sqrt{8^2+6^2}=10$$

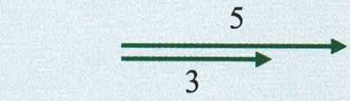
כיוונו של הווקטור השקול מתקבל מהקשר:

$$\tan\alpha=\frac{6}{8}\quad\Rightarrow\alpha=36.87^\circ$$

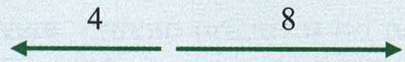
דוגמה 3

מצא את סכום שני הווקטורים במקרים הבאים:

(א)



(ב)



(ג)

פתרון:

א. הסכום הוא 8 יחידות בכיוון ימין.

ב. הסכום הוא 4 יחידות בכיוון ימין.

ג. הסכום הוא 4 יחידות בכיוון שמאל.

3. חיבור וקטורים בדרך מתמטית

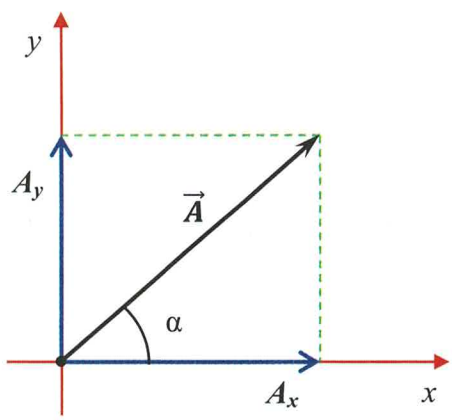
בסעיף זה נלמד איך למצוא את הסכום של שני וקטורים בדרך חישובית. בדוגמאות הקודמות נוכחנו לדעת שאם שני הווקטורים נמצאים על אותו קו ישר, או ששניהם ניצבים זה לזה, ניתן למצוא את סכומם בדרך חישובית באופן מידי.

השאלה הנשאלת היא איך ניתן למצוא בדרך חישובית את הסכום של שני וקטורים, הנמצאים במישור, כך שהם אינם בהכרח נמצאים על אותו קו ישר או ניצבים זה לזה? על מנת לענות על שאלה זו, נצטרך קודם להגדיר את הרכיבים הניצבים של וקטור.

3.1 רכיבים ניצבים של וקטור

הרכיבים הניצבים של וקטור מסוים $\vec{A}$ הם שני וקטורים הניצבים זה לזה ומקיימים את התנאי שהסכום הווקטורי שלהם שווה לווקטור $\vec{A}$.

על פי הגדרה זו קיימים אינסוף רכיבים ניצבים של וקטור כלשהו, כי לכל וקטור ניתן למצוא אינסוף זוגות וקטורים הניצבים זה לזה שהסכום הווקטורי שלהם שווה לווקטור הנתון. לעומת זאת, אם בוחרים מערכת צירים xy מסוימת, יהיו לווקטור $\vec{A}$ במערכת זו רק שני רכיבים ניצבים, הראשון שמכוון בכיוון ציר x ומסומן ב-A_x, והשני בכיוון ציר y ומסומן ב-A_y.



איור 8: הרכיבים הניצבים של הוקטור $\vec{A}$ מופיעים בכחול.

על מנת למצוא את הרכיבים הניצבים של וקטור מסוים $\vec{A}$ במערכת צירים נתונה xy, (ראה איור 8), מורידים מראשו של הווקטור $\vec{A}$ שני ניצבים, הראשון, אל ציר ה-x והשני אל ציר y (איור 8). הניצב הראשון קובע את הרכיב הניצב A_x, והניצב השני קובע את הרכיב הניצב A_y. ברור שהסכום הווקטורי של שני הווקטורים A_x ו-A_y שווה לווקטור $\vec{A}$ הנתון.

אם נתון את גודלו וכיוונו של הווקטור $\vec{A}$ ניתן לחשב את הרכיבים הניצבים שלו, וזאת על ידי הקשרים הבאים:

$$A_x = A\cos\alpha \qquad (2)$$

$$A_y = A\sin\alpha \qquad (3)$$

כאשר הזווית α היא הזווית הנמצאת בין הכיוון החיובי של ציר ה-x לבין הווקטור. זווית זו מוגדרת חיובית כאשר מתקדמים בכיוון המנוגד לכיוון תנועת מחוגי השעון, ומוגדרת שלילית כאשר מתקדמים בכיוון תנועת מחוגי השעון.

אם נתונים הרכיבים הניצבים A_x ו-A_y של הווקטור $\vec{A}$, ניתן באמצעותם לחשב את גודלו וכיוונו

הווקטור A, מאחר ומתקיים:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{4}$$

ו-

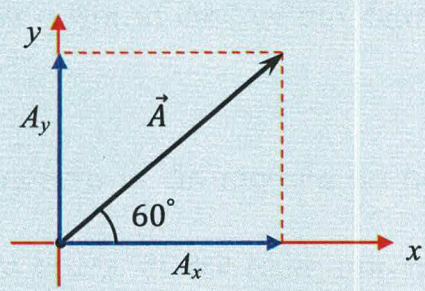
$$\tan\alpha = \frac{A_y}{A_x} \tag{5}$$

הרכיבים הניצבים של וקטור יכולים להחליף את הווקטור עצמו. כתוצאה מתכונה זו הם ממלאים תפקיד חשוב במציאת הסכום הווקטורי של שני וקטורים (או יותר) בדרך חישובית, כפי שנראה בהמשך.

דוגמאות

דוגמה 1

חשב את הרכיבם הניצבים של וקטור $\vec{A}$ שאורכו 10 יחידות ויוצר זווית בת 60° עם הכיוון החיובי של ציר x, כפי שמתואר בתרשים הבא:

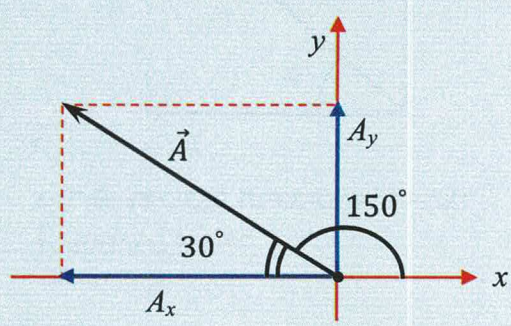


פתרון:

$$A_x = 10\cos 60 = 5$$
$$A_y = 10\sin 60 = 8.66$$

דוגמה 2

חשב את הרכיבם הניצבים של וקטור שאורכו 8 יחידות, היוצר זווית בת 150° עם הכיוון החיובי של ציר x, כפי שמתואר בתרשים הבא:



פתרון:

$$A_x = 8\cos 150 = -6.92$$
$$A_y = 8\sin 150 = 4$$

קיבלנו ש-A_x שלילי וזה הגיוני מאחר ו-A_x מכוון לכיוון השלילי של ציר x.

ניתן לבצע את החישובים בזוויות חדות בלבד, ולא לעשות שימוש בקהות, כלומר במקום הזווית 150° בדוגמה הנ"ל ניתן להתייחס לזווית חדה שגודלה במקרה זה 30° (ראה איור). ניתן לעשות זאת, אבל יש לשים לב שהרכיבים המתקבלים במקרה כזה אינם כוללים את הסימנים, ויש להוסיף אותם ידנית על פי כיוון הרכיבים. במקרה זה נקבל:

$$A_x = 8\cos 30 = 6.92$$
$$A_y = 8\sin 30 = 4$$

שים לב שבחישוב זה התקבל A_x חיובי למרות שהוא צריך להיות שלילי, ועל כן יש להוסיף את הסימן ידנית ונקבל:

$$A_x = -8\cos 30 = -6.92$$
$$A_y = 8\sin 30 = 4$$

דוגמה 3

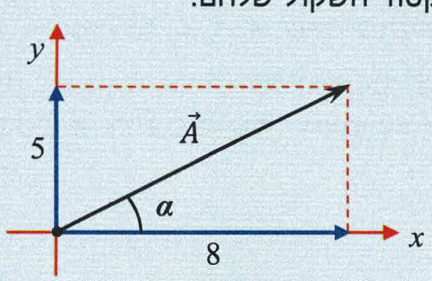
מצא את הווקטור השקול עבור הרכיבים הניצבים הבאים:

א. $A_x = 8$ ו-$A_y = 5$.

ב. $A_x = -7$ ו-$A_y = 5$.

פתרון:

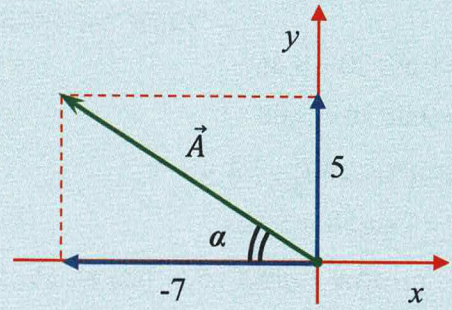
א. בתרשים הבא מתוארים הרכיבים הניצבים והווקטור השקול שלהם:



מתקיים:

$$A = \sqrt{8^2 + 5^2} = 9.434$$
$$\tan\alpha = \frac{5}{8} \Rightarrow \alpha = 32^\circ$$

ב. בתרשים הבא מתוארים הרכיבים הניצבים והווקטור השקול שלהם:



מתקיים:

$$A=\sqrt{(-7)^2+5^2}=8.6$$

$$\tan\alpha=\left|\frac{5}{-7}\right| \Rightarrow \alpha=35.5^\circ$$

שים לב שבחישוב $\tan\alpha$ לקחנו את הערך המוחלט של הגודל A_y/A_x וזאת על מנת שלא לעסוק בסימן בחישוב הטנגנס. הזווית המתקבלת במקרה זה היא תמיד הזווית החדה, שהיא הזווית ביחס לחלק הקרוב של ציר x (ראה תרשים למעלה). הזווית של הווקטור ביחס לכיוון החיובי של ציר x שווה במקרה זה ל:

$$\beta=180-35.5=144.5^\circ$$

3.2 חיבור וקטורים בעזרת הרכיבים הניצבים

נניח שנתונים שני וקטורים $\vec{A}$ ו-$\vec{B}$ ורוצים לחשב את השקול שלהם (סכומם הווקטורי) אותו נסמן ב-$\vec{C}$:

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B} \qquad (6)$$

על מנת לחשב את וקטור הסכום $\vec{C}$ יש להתקדם בשלבים הבאים:

1. נשרטט את שני הווקטורים $\vec{A}$ ו-$\vec{B}$ במערכת צירים xy שנבחר, כך ששני הווקטורים יתחילו מראשית מערכת הצירים.
2. נפרק כל אחד משני הווקטורים $\vec{A}$ ו-$\vec{B}$ לרכיבים הניצבים שלו כך שנקבל A_x ו-A_y עבור הווקטור $\vec{A}$, B_x ו-B_y עבור הווקטור $\vec{B}$. ארבעה רכיבים ניצבים אלה מחליפים את שני הווקטורים $\vec{A}$ ו-$\vec{B}$, לכן מתקבלים רכיבים בכיוונים x ו-y בלבד.
3. נמצא את השקול של הרכיבים שבכיוון ציר x וגם את השקול של הרכיבים שבכיוון ציר y. כך מתקבלים הרכיבים הניצבים C_x ו-C_y של וקטור הסכום $\vec{C}$ שנקרא גם השקול:

$$C_x=A_x+B_x \qquad (7)$$

$$C_y=A_y+B_y \qquad (8)$$

4. באמצעות הרכיבים C_x ו-C_y מחשבים את הווקטור השקול $\vec{C}$ (גודל וכיוון) באמצעות הקשרים הבאים:

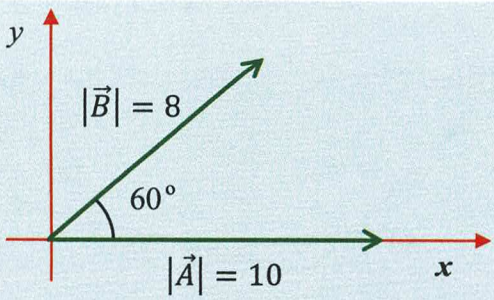
$$C=\sqrt{C_x^2+C_y^2} \qquad (9)$$

$$\tan\alpha_C=\frac{C_y}{C_x} \qquad (10)$$

דוגמאות:

דוגמה 1

מצא את הסכום של שני הווקטורים $\vec{A}$ ו-$\vec{B}$ המוצגים בתרשים הבא:

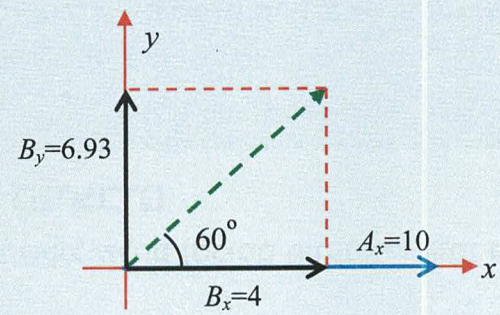


פתרון:

נפרק כל אחד משני הווקטורים לרכיבים הניצבים שלו ונקבל:

$$\begin{cases} A_x = 10 \\ A_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x = 8\cos 60 = 4 \\ B_y = 8\sin 60 = 6.93 \end{cases}$$

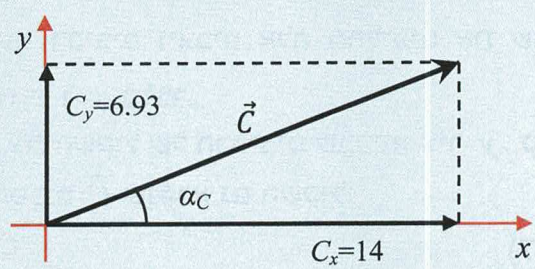
בכך נקבל את הרכיבים הניצבים המתוארים בתרשים הבא שמחליפים את הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$.



באמצעות רכיבים אלה מקבלים את רכיבי הווקטור השקול שהם:

$$C_x = A_x + B_x = 10 + 4 = 14$$
$$C_y = A_y + B_y = 0 + 6.93 = 6.93$$

רכיבים אלה מתוארים בתרשים הבא:



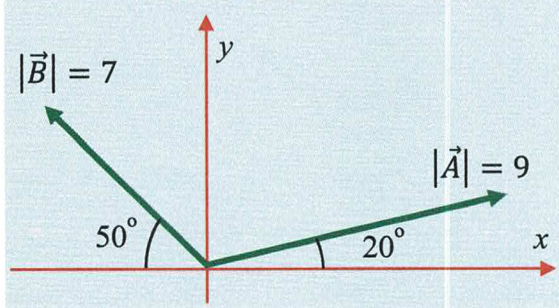
באמצעות רכיבים אלה מחשבים את גודלו וכיוונו של הווקטור $\vec{C}$, ומתקבל:

$$C = \sqrt{14^2 + 6.93^2} = 15.62$$

$$\tan\alpha_C = \frac{6.93}{14} \Rightarrow \alpha_C = 26.33^\circ$$

דוגמה 2

מצא את הסכום הווקטורי של שני הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ המתוארים בתרשים הבא:



פתרון:

נפרק כל אחד משני הווקטורים לרכיבים הניצבים שלו ונקבל:

$$\begin{cases} A_x = 9\cos 20 = 8.46 \\ A_y = 9\sin 20 = 3.08 \end{cases}$$

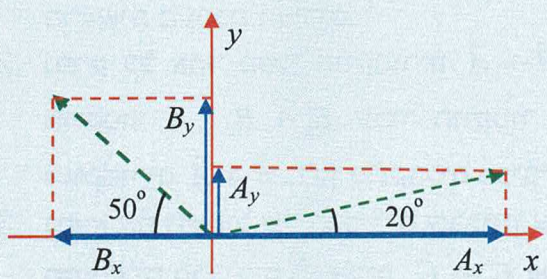
$$\begin{cases} B_x = -(7\cos 50) = -4.5 \\ B_y = 7\sin 50 = 5.36 \end{cases}$$

שים לב שעבור B_x קבענו שהסימן שלילי מכיוון שרכיב זה מכוון בכיוון השלילי של הציר.

ניתן לחשב את B_x (כולל הסימן) אם נגדיר את הזווית של וקטור זה ביחס לכיוון החיובי של ציר x, כך שנקבל שהזווית היא: $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$, ומכאן:

$$\begin{cases} B_x = 7\cos 130 = -4.5 \\ B_y = 7\sin 130 = 5.36 \end{cases}$$

הרכיבים הניצבים של הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ מוצגים בתרשים הבא:



באמצעות רכיבים אלה ניתן לקבל את הרכיבים C_x ו- C_y של הווקטור השקול שהם:

$$C_x = A_x + B_x = 8 + (-4.5) = 3.96$$
$$C_y = A_y + B_y = 3.08 + 5.36 = 8.44$$

ומכאן:

$$C = \sqrt{8.44^2 + 3.96^2} = 9.32$$

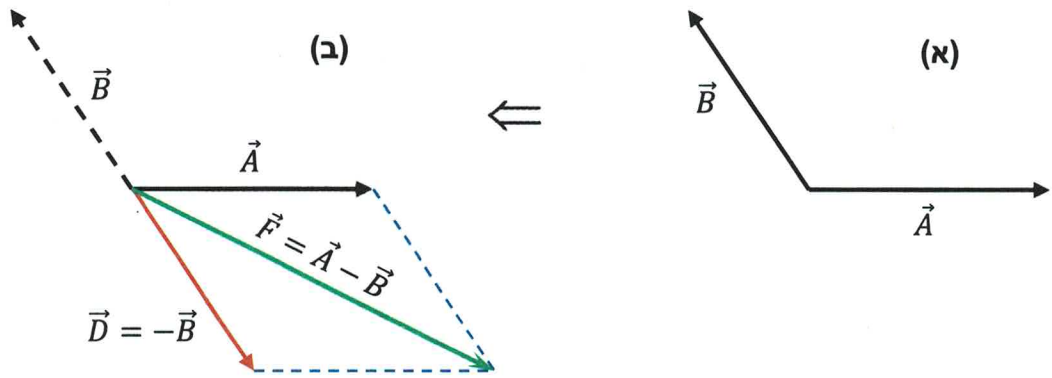
ו-

$$\tan\alpha_C = \frac{8.44}{3.96} \Rightarrow \alpha_C = 64.86^\circ$$

4. חיסור וקטורים

חיסור וקטורים היא פעולה ששקולה לחיבור וקטורים. אם נתונים שני הווקטורים $\vec{A}$ ו-$\vec{B}$ המתוארים באיור 9א, ורוצים לחשב את הווקטור $\vec{F}$ שהוא ההפרש שלהם: $\vec{F}=\vec{A}-\vec{B}$, אז פעולה זו זהה לחיבור הווקטור $\vec{A}$ עם הווקטור הנגדי ל-$\vec{B}$ $\left(-\vec{B}\right)$. הווקטור $-\vec{B}$ הוא וקטור הזהה בגודלו לווקטור $\vec{B}$ אבל מנוגד לו בכיוון (ראה תרשים 9ב). אם נסמן את הווקטור $-\vec{B}$ ב-$\vec{D}$, נקבל שהווקטור $\vec{F}$ שווה ל-$\vec{A}+\vec{D}$, וזהו הווקטור המתואר בירוק באיור 9ב, והנתון על ידי:

$$\vec{F}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+\vec{D} \tag{11}$$



איור 9: (א) שני וקטורים $\vec{B}$ ו-$\vec{C}$ (ב) הוקטור $\vec{B}-\vec{C}$ הוא הסכום של $\vec{B}$ עם הוקטור הנגדי של $\vec{C}$.

יש לשים לב לכך שמתקיים:

$$D_x=-B_x \tag{12}$$

$$D_y=-B_y \tag{13}$$

ולכן נקבל ש:

$$F_x=A_x+D_x=A_x-B_x \tag{14}$$

$$F_y=A_y+D_y=A_y-B_y \tag{15}$$

לכן על מנת למצוא את הווקטור $\vec{F}$ בדרך חישובית יש להתקדם על פי השלבים הבאים:

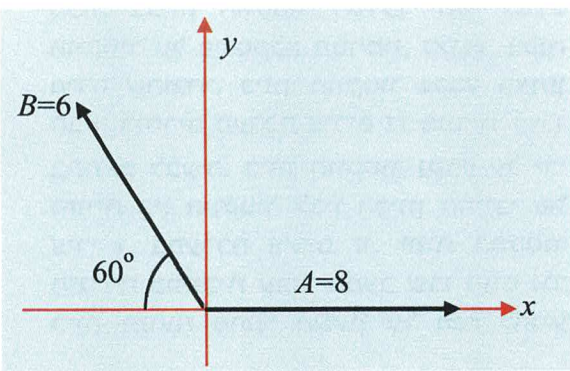
1. נחשב את הרכיבים הניצבים של שני הווקטורים $\vec{A}$ ו-$\vec{B}$.
2. נחשב את הרכיבים: $F_x=A_x-B_x$ ו-$F_y=A_y-B_y$.
3. נמצא את גודל וקטור ההפרש $\vec{F}$ על ידי הקשרים:

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2} \tag{16}$$

$$\tan\alpha_F=F_y/F_x \tag{17}$$

דוגמה לחיסור וקטורים

מצא את הווקטור $\vec{F}=\vec{A}-\vec{B}$ כאשר $\vec{A}$ ו-$\vec{B}$ הם שני הווקטורים המתוארים בתרשים הבא:



פתרון:

קודם נפרק את שני הווקטורים לרכיבים שלהם ונקבל:

$$\begin{cases} A_x = 8 \\ A_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x = 6\cos 120 = -3 \\ B_y = 6\sin 120 = 5.2 \end{cases}$$

כעת נחשב את רכיבי וקטור ההפרש $\vec{F}$ ונקבל:

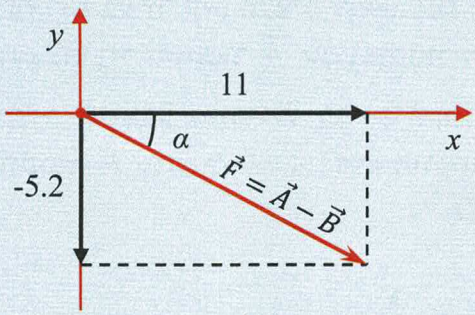
$$F_x = A_x - B_x = 8 - (-3) = 11$$
$$F_y = A_y - B_y = 0 - 5.2 = -5.2$$

שני רכיבים אלה מתוארים בתרשים שלפניך. לכן נקבל:

$$F = \sqrt{11^2 + 5.2^2} = 12.17$$

$$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-5.2}{11} \quad \Rightarrow \alpha = -25.3^\circ$$

כאשר α נמצאת מתחת לציר ה- x.



סיכום פרק 4

1. סקלר הוא גודל פיזיקלי שעל מנת לבטא (או להגדיר) אותו בשלמות מספיק ערך אחד – הכמות שלו (וכמובן שיש לציין את יחידות המידה). דוגמאות לגדלים פיזיקליים שהם סקלרים: המסה, הזמן, האורך, הנפח והצפיפות.
2. וקטור הוא גודל פיזיקלי שעל מנת לבטא (או להגדיר) אותו בשלמות נדרשים גם הכמות שלו (בצירוף יחידות המידה) וגם הכיוון שלו במרחב. דוגמאות לגדלים שהם וקטורים: המהירות, הכוח, התאוצה. על מנת לקבוע כל אחד מגדלים אלה, לא מספיק לתת ערך מספרי ויחידת מידה, אלא יש לקבוע גם את הכיוון שלו.
3. על מנת להבדיל גודל וקטורי מגודל סקלרי, נהוג להוסיף חץ קטן מעל הסמל של הגודל הווקטורי. לדוגמא רושמים $\vec{v}$ עבור המהירות כווקטור, או $\vec{a}$ עבור התאוצה כווקטור או $\vec{F}$ עבור הכוח.
4. הווקטור בתרשימים מיוצג על ידי חץ. חץ זה מכוון בכיוון הווקטור ואורכו יחסי לגודל הווקטור על פי סקלה מסוימת, כלומר בקנה מידה שהוגדר. כיוון הווקטור נקבע באופן הבא: בוחרים מערכת צירים דו ממדית (xy) בהתאם לבעיה. כיוון הווקטור נקבע על ידי הזווית בין הווקטור לבין הכיוון החיובי של ציר x במערכת צירים זו. זווית הווקטור מוגדרת כחיובית עבור המצב שבו נעים נגד כיוון תנועת מחוגי השעון על מנת להגיע מציר x אל הווקטור, ושלילית עבור המצב שבו נעים בכיוון תנועת מחוגי השעון על מנת להגיע מציר x אל הווקטור.
5. על מנת למצוא בדרך גרפית את וקטור הסכום $\vec{C}$ של שני הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$, כלומר כדי לבצע את הפעולה $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, יש להתקדם בצעדים הבאים: (א) משרטטים בקנה מידה את שני הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$, כך שהזנב של הווקטור B צמוד לראש הווקטור $\vec{A}$. (2) מחברים את הזנב של הווקטור $\vec{A}$ עם הראש של הווקטור $\vec{B}$. הווקטור המתקבל הוא הווקטור $\vec{C}$.
6. ניתן לבצע את פעולת החיבור גם בדרך אחרת, שקולה, והיא על פי הצעדים הבאים: (א) משרטטים את שני הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ כך ששני הזנבות שלהם מתחילים מאותה נקודה. (ב) משלימים את שני הווקטורים למקבילית. (ג) הסכום של שני הווקטורים הוא הווקטור המחבר את נקודת ההתחלה של שני הווקטורים עם הקדקוד שממול.
7. הרכיבים הניצבים של וקטור מסוים $\vec{A}$ במערכת צירים ניצבים xy הם שני וקטורים הניצבים זה לזה, שהראשון מכוון בכיוון ציר x ומסומן ב- A_x, והשני בכיוון ציר y ומסומן ב- A_y המקיימים את התנאי שהסכום הווקטורי שלהם שווה לווקטור $\vec{A}$.
8. על מנת למצוא את הרכיבים הניצבים של וקטור מסוים $\vec{A}$ במערכת צירים נתונה xy,

מורידים מראשו של הווקטור $\vec{A}$ שני ניצבים, הראשון, אל ציר x והשני אל ציר y. הניצב הראשון קובע את הרכיב הניצב A_x, והניצב השני קובע את הרכיב הניצב A_y.

9. הרכיבים הניצבים של וקטור מסוים $\vec{A}$ נתונים על יד הקשרים: $A_x = A\cos\alpha$ ו- $A_y = A\sin\alpha$, כאשר A הוא גודלו של הווקטור ו- α היא הזווית של הווקטור.

10. אם נתונים הרכיבים הניצבים A_x ו- A_y של הווקטור $\vec{A}$, ניתן באמצעותם לחשב את גודלו וכיוונו הווקטור $\vec{A}$, כך שמתקיים:
$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ ו- $\tan\alpha = A_y / A_x$.

11. על מנת לחשב את וקטור הסכום $\vec{C}$ של שני וקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$, יש להתקדם בצעדים הבאים:
א. נשרטט את שני הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ במערכת צירים xy שנבחר, כך ששני הווקטורים יתחילו מראשית מערכת הצירים.
ב. נפרק כל אחד משני הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ לרכיבים הניצבים שלו כך שנקבל A_x ו- A_y עבור הווקטור $\vec{A}$, B_x ו- B_y עבור הווקטור $\vec{B}$.
ג. נמצא את השקול של הרכיבים שבכיוון ציר x וגם את השקול של הרכיבים שבכיוון ציר y. כך שמתקיים:
$C_x = A_x + B_x$ ו- $C_y = A_y + B_y$.
ד. באמצעות הרכיבים C_x ו- C_y מחשבים את הווקטור השקול $\vec{C}$ (גודל וכיוון) באמצעות הקשרים הבאים:
$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$ ו- $\tan\alpha_C = C_y / C_x$.

12. הווקטור $-\vec{B}$ הוא וקטור הזהה בגודלו לווקטור $\vec{B}$ אבל מנוגד לו בכיוון.

תרגילים ובעיות – פרק 4

.1

א. הגדר את המושג "גודל סקלרי".

ב. הגדר את המושג "גודל וקטורי".

.2

חשב את הרכיבים הניצבים של הווקטורים המוצגים בטבלה הבאה:

	גודל הווקטור $\left\vert\vec{A}\right\vert$	הכיוון
א.	15	α=30°
ב.	10	α=90°
ג.	11	α=160°
ד.	7	α=180°
ה.	8	α=210°
ו.	4	α=-60°

.3

בטבלה הבאה מוצגים הרכיבים הניצבים של ששה וקטורים. חשב את הווקטור השקול (גודל וכיוון) של כל זוג רכיבים.

	A_x	A_y
א.	5	5
ב.	0	8
ג.	-5	7
ד.	-8	-4
ה.	5	0
ו.	-7	-6

.4

חשב את הווקטור $\vec{C}$ שהוא הסכום של הווקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ שבסעיפים הבאים:

א. $\vec{A}=\left(7,30^\circ\right)$ ו- $\vec{B}=\left(8,90^\circ\right)$.

ב. $\vec{A}=\left(7,20^\circ\right)$ ו- $\vec{B}=\left(8,70^\circ\right)$.

ג. $\vec{A}=\left(9,20^\circ\right)$ ו- $\vec{B}=\left(5,150^\circ\right)$.

ד. $\vec{A}=\left(8,40^\circ\right)$ ו- $\vec{B}=\left(20,160^\circ\right)$.

.5

מצא את הווקטורים הנגדיים לווקטורים שחישבת בשתי השאלות האחרונות.

.6

חשב את הגודל $\vec{A}-\vec{B}$ במקרים הבאים:

א. $\vec{A}=\left(10,30^\circ\right)$ ו- $\vec{B}=\left(10,90^\circ\right)$.

ב. $\vec{A}=\left(5,10^\circ\right)$ ו- $\vec{B}=\left(8,60^\circ\right)$.

ג. $\vec{A}=\left(8,60^\circ\right)$ ו- $\vec{B}=\left(5,120^\circ\right)$.

ד. $\vec{A}=\left(12,50^\circ\right)$ ו- $\vec{B}=\left(20,160^\circ\right)$.

.7

אדם יוצא מביתו והולך בדרך לאורך מסלול מסוים. לתיאור תנועת האדם בוחרים במערכת צירים xy שבה הראשית O היא נקודת ההתחלה. בזמן מסוים האדם מגיע לנקודה B: $\left(0.6\,\text{km},0.8\,\text{km}\right)$, ובזמן מאוחר יותר הוא עוצר בנקודה A: $\left(1.5\,\text{km},1.2\,\text{km}\right)$.

א. מצא את וקטורי ההעתק: $\overrightarrow{OB}$ ו- $\overrightarrow{BA}$.

ב. מצא את ההעתק השקול $\overrightarrow{OA}$ בשתי דרכים:

1) על ידי מציאת הווקטור $\overrightarrow{OA}$ ישירות.

2) על ידי הסכום: $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OB}$.

פרק 5 – כוחות והחוק השלישי של ניוטון

בפרקים הקודמים עסקנו בתיאור תנועה (מיקום ומהירות כפונקציה של הזמן) ללא קשר לכוחות הגורמים לתנועה זו. בפרק זה ובפרקים הבאים נעסוק בכוחות ובקשר בינם לבין תנועת הגוף. קשר זה מתבטא בחוקי ניוטון.

בפרק זה נעסוק במשמעות הפיזיקלית של מושג הכוח ובחוק השלישי של ניוטון, המגלם משמעות זאת.

החוק השלישי של ניוטון נקרא בשם זה כי הוא החוק השלישי מבין שלושת חוקי המכניקה אותם ניסח ניוטון והמופיעים בספרו "העקרונות המתמטיים של פילוסופיית הטבע" שיצא לאור בשנת 1687.

למרות שחוק זה הוא החוק השלישי על פי הסדר שמופיע בספרו של ניוטון, אנו מתחילים בו כי מצד אחד חוק זה קשור להבנת מושג הכוח, ומצד שני קל יותר להתחיל בו מבחינה דידקטית.

1. האינטראקציה, הכוח והחוק השלישי של ניוטון

כולנו משתמשים יום יום במושג הכוח, וגם מפעילים כוחות על גופים סביבנו. גם עלינו מופעלים כוחות שונים, כמו כוח הכובד. בנוסף אנו נתקלים במצבים בהם גוף אחד מפעיל כוח על גוף אחר, כמו במקרה של שני מגנטים, או בהתנגשות בין גופים.

למרות ההתנסויות היומיומיות שלנו במושג הכוח, אם ננסה להגדיר מושג זה נגלה שאנו עומדים בפני קושי מסוים. על מנת שנוכל להגדיר את מושג הכוח, נדרשת הבנה מסוימת של הפעולה המתרחשת בין שני הגופים ואשר קשורה להופעת הכוח. הניתוח בסעיף זה יוביל אותנו להבנת מושג הכוח, להגדרתו ולניסוח החוק השלישי של ניוטון.

1.1 השפעה הדדית (אינטראקציה)

ידוע לנו מניסיוננו היום יומי, שישנם מקרים בהם גופים נמשכים זה לזה או דוחים זה את זה. לדוגמה, כאשר מקרבים שני גופים טעונים זה לזה, הם נמשכים זה לזה או דוחים האחד את השני. אם סימני המטענים שעל שני הגופים הם שונים, אחד חיובי והאחר שלילי, כפי שמתואר באיור 1א, הם נמשכים זה לזה, ואם סימני שני המטענים שעל שני הגופים זהים, שניהם שליליים או שניהם חיוביים, כפי שמתואר באיורים 1ב ו-1ג, הם דוחים זה את זה.